

LJAA / POG

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES N°Série : C-EDurée : 4 heuresCoef. : 5**Exercice 1(5 points)**

L'objectif est d'étudier la suite (U_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par ;

$$U_0 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx \text{ et, pour } n \geq 1, U_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx.$$

1°) Soit f la fonction numérique définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Montrer que $f'(x) = 2\sqrt{1+x^2}$, en déduire U_0 , puis Calculer U_1 .

2°) a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. Justifier que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ converge.

b) Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, on a : $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$.

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$. (1)

Déterminer la limite de (U_n) .

3°) Pour tout entier $n \geq 3$, on pose $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{(1+x^2)^3} dx$.

a) Vérifier que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $U_n + U_{n-2} = I_n$.

b) Par une intégration par parties portant sur I_n , montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$I_n = \frac{2\sqrt{2}}{n-1} - \frac{3}{n-1} U_n.$$

En déduire que pour tout entier $n \geq 3$: $(n+2) U_n + (n-1) U_{n-2} = 2\sqrt{2}$

c) En utilisant la monotonie de la suite U_n , montrer que :

$$(n+2) U_n + (n-1) U_{n-2} \leq (2n+1) U_{n-2}$$

Etablir alors que pour tout $p \geq 1$: $(2p+5) U_p \geq 2\sqrt{2}$ (2)

d) A l'aide des inégalités (1) et (2) montrer que : $2\sqrt{2} \leq (2p+5) U_p \leq \frac{(2p+5)\sqrt{2}}{p+1}$

e) Prouver alors que la suite $(n U_n)$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2(5 points)

ABC est un triangle. M est un point du plan distinct de A, de B et de C. On désigne par P, Q et R les projetés orthogonaux de M respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB).

1°) Faire une figure.

2°) Démontrer que :

- a) les points M, A, Q et R sont cocycliques.
- b) les points M, P, R et B sont cocycliques.

3°) Justifier pourquoi :

- a) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MR}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{QR}) \pmod{\pi}$
- b) $(\overrightarrow{MR}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{CB}) \pmod{\pi}$

4°) En déduire que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{QR}) \pmod{\pi}$

5°) a) Faire une nouvelle figure avec M sur le cercle circonscrit au triangle ABC, puis tracer la droite (PQ). Que constatez-vous ?

- b) En utilisant la question 4°), démontrer alors que P, Q et R sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

La droite passant par P, Q et R est appelée la droite de SIMSON du point M.

6°) Dans cette question, on suppose que M est sur (C) le cercle circonscrit au triangle (ABC).

(D) désigne la droite de SIMSON du point M. La droite (MP) recoupe (C) en E.

- a) Faire une nouvelle figure.
- b) En utilisant la cocyclicité des 4 points B, P, M et R, établir une relation entre : $(\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BM})$ et $(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PM})$.
- c) Justifier pourquoi : $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EM}) = (\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BM}) \pmod{\pi}$
- d) En déduire alors que $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EM}) = (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{EM}) \pmod{\pi}$. Quelle est alors la position relative des droites (EA) et (D).

PROBLEME (10 points)

PARTIE A

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par f l'application de P vers P qui au point M (x; y) associe le point M'(x'; y') tel que :

$$\begin{cases} x' = x \ln a - y \ln b \\ y' = x \ln b + y \ln a \end{cases}$$

a et b étant deux réels strictement positifs.

On rappelle qu'une expression de la forme : $z' = \alpha z + \beta$ définit une transformation si et seulement si $\alpha \neq 0$.

On désigne par z l'affixe du point M (x, y) et par z' l'affixe du point M'(x'; y') image de M par f.

1°) a) Exprimez z' en fonction de z .

b) Pour quelles valeurs du couple $(a; b)$ f est une transformation ?

2°) Dans la suite le couple $(a; b)$ désigne les coordonnées d'un point N du plan.

a) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points N pour lesquels f est une homothétie.

b) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble $(\mathcal{E}')$ des points $N(a; b)$ pour lesquels f est une rotation de centre O .

PARTIE B

1°) soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto e^x - x$.

a) Etudier les variations de g , puis donner le signe de $g(x)$.

b) L'équation $g(x) = 0$ admet-elle une solution ? (Justifier votre réponse)

2°) On désigne par $(\mathcal{Q})$ le quart de plan défini par : $(\mathcal{Q}) = \{ M(x; y) \text{ tel que : } x > 0 \text{ et } y > 0 \}$

φ est l'application de P vers $\mathcal{Q}$ défini par :

$$\begin{array}{lcl} \varphi: P & \rightarrow & \mathcal{Q} \\ M(x; y) & \mapsto & M'(x'; y') \end{array} \quad \text{tel que } \begin{cases} x' = e^x \\ y' = e^y \end{cases}$$

a) φ admet-elle des points invariants ? Justifier votre réponse.

b) Donner une équation cartésienne de l'image par φ de la droite (Δ) d'équation : $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ avec $(\alpha; \beta) \neq (0; 0)$

c) Préciser la nature de l'image par φ de la droite Δ dans les 2 cas suivants :

$$\alpha = 0, \quad \text{puis } \alpha = \beta$$

PARTIE C

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1°) Vérifier que l'image par φ du cercle $(\mathcal{C})$ est l'ensemble $(\mathcal{E}')$.

2°) (Γ_1) et (Γ_2) sont les courbes représentatives dans le plan P des fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle $[\frac{1}{e}; e]$ par :

$$f_1: x \mapsto e^{\sqrt{1 - \ln^2 x}} \quad f_2: x \mapsto e^{-\sqrt{1 - \ln^2 x}}$$

a) Etudier les variations de f_1 et de f_2 .

b) Construire (Γ_1) et (Γ_2) sur un même graphe.

c) Montrer que $(\mathcal{E}') = (\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)$